

Mikro boyuttaki ters basamak geometrisi içindeki akışın KTA yöntemiyle analizi

Bayram ÇELİK*, Fırat Oğuz EDİS

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Uzay Bilimleri ve Teknolojisi Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Karakteristik Tabanlı Ayırma Algoritması, sürekli rejimde yer alan sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz viskoz akış problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi çözümünde geçerlidir. Bu çalışma kapsamında, Karakteristik Tabanlı Ayırma çözücüsü, kayma rejiminde yer alan mikro akış problemlerinin çözümünde de kullanılabilecek şekilde geliştirilmiştir. Mikro boyuttaki ters basamak geometrisi içindeki azot akışı, geliştirilen çözücü kullanılarak analiz edilmiştir. Bu geometri içindeki akış, ters basınç gradyeni ve akım ayrılması içermesi sebebiyle özellikle seçilmiştir. Gerçekleştirilen analizlerde, aynı giriş çıkış basınç oranı ve birbirinden farklı giriş parametrelerine sahip üç ayrı akış hesaplamalı olarak incelenmiştir. İncelenen bu üç akışa ait parametreler, söz konusu akış kayma rejiminde yer alacak şekilde belirlenmiştir. Kayma rejiminde yer alan akışlarda katı duvar yüzeylerinde meydana gelen kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması, Beskok ve Karniadakis'e ait ikinci mertebeden sınır şartlarının uygulanmasıyla hesaplanmıştır. Yapılan analizlerde, hesaplamalar için gereken duyulan bilgisayar zamanı ve bellek miktarını düşürmek için, pP2P1 tipi elemanlar P1P1 tipi elemanların yerine kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, gerçekleştirilen uyarlamaları doğrulamak için literatürde yer alan diğer hesaplamalı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Gerçekleştirilen bu analizle, akışa ait parametrelerin kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması dağılımı ile ilişkisi araştırılmıştır. Bu amaçla, incelenen her üç akışa ait yerel Mach sayısı konturları, kanal boyunca Knudsen sayısı değişimi grafikleri ve tekrar duvara yapışma mesafeleri bu çalışmada sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar ve karşılaştırmalar, geliştirilen çözücünün kayma rejiminde yer alan mikro akış problemlerinin çözümü ve analizinde kullanılabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: *Kayma-hızı, sıcaklık-sıçraması, karakteristik tabanlı ayırma yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, mikro akış.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Bayram ÇELİK. celikbay@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 34 40.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Uzay Bilimleri ve Teknolojisi Programı'nda tamamlanmış olan "Analysis of micro flows using a Finite Element Method" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 20.02.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 27.04.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.08.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Analysis of fluid flow through a micro size backward facing step duct via CBS

Extended abstract

Knudsen number (Kn) is a measure of rarefaction and it is defined as the ratio of mean free path (λ) to the characteristic length of the flow (L). In continuum regime where Kn is smaller than 10^{-3} , fluid flow problems can be solved using continuum models such as Navier-Stokes equations (N-S). The interval where Kn is in the range of 10^{-3} to 10^{-1} is called the slip regime. In this regime, N-S solvers can be used for simulation of fluid flow if slip-velocity and temperature-jump boundary conditions are employed on solid wall instead of usual no-slip and temperature-wall boundary conditions which are valid in the continuum regime.

In recent years, extremely small sized devices have been manufactured due to the development in production technologies. These devices are combinations of electrical and mechanical devices. Their sizes are in the range of 1 mm to 1 micron and they are called Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS). Some applications of the MEMS are related directly or indirectly to fluid flow. Fluid flow through or around the MEMS differs from the larger devices. The increase in the surface to volume ratio due to the decreasing characteristic length affects transport of mass, momentum and energy through the surfaces. Furthermore, flow deviates from the thermodynamic equilibrium and slip-flow, temperature-jump, thermal creep, rarefaction, viscous dissipation, compressibility, intermolecular forces and other unconventional effects become important. It is reported that most of the MEMS devices work in slip regime at standard conditions. Thus, using appropriate models for numerical simulation of fluid flow through or around the MEMS would help to increase its productivity and to reach a better comprehension of their functions.

In 1995, Zienkiewicz et al. introduced a unified algorithm designed to replace the Taylor-Galerkin (or Lax-Wendroff) methods that have been used in the solution of compressible flow problems in Finite Element Method (FEM) context. Then, they have published several papers concerning the basis and applications of this new algorithm. Finally they introduced an algorithm named as Characteristic-Based-Split (CBS) algorithm. Thus, fractional step

process of Chorin is extended to solve the fluid dynamics equations of both compressible and incompressible forms.

In this study, the CBS algorithm is modified to perform micro flow analysis. The second order slip-velocity and temperature-jump boundary conditions of Beskok and Karniadakis are implemented on solid wall to the micro flow analyses presented in this study. The second order formulation proposed by Beskok and Karniadakis includes a thermal creep term similar to the first order formulation found in literature. In this study, semi-implicit form of the CBS algorithm is used and in order to reduce the size of implicit part of the N-S FEM solver, pP2P1 type elements are used instead of P1P1..

Solution procedure and Galerkin weak form the auxiliary momentum, continuity, end of step momentum and energy equations of proposed CBS algorithm are given with details in this paper. Micro backward facing step is one of the MEMS devices and fluid flow through this device is quite complex since there are adverse pressure gradient and separation in flow field. In this study, micro backward facing step is selected as test geometry for micro flow analysis in slip regime. The solver is used to analyze nitrogen gas flow through this geometry for three different cases having different inlet Mach (M) and Reynolds numbers (Re). Inlet to outlet pressure ratio is equal to 2.32 for these three cases. To verify the performed implementations, obtained results are compared with available numerical results found in literature in terms of accuracy. Relationships between the flow conditions such as inlet M , Re , reattachment lengths and slip-velocity, temperature-jump distributions are numerically investigated. Local M contours and Kn variations are presented within this study for all cases. It is observed that increasing Kn at the channel inlet results in decreasing reattachment length values. Decreasing M values at the channel inlet results in increasing normalized slip-velocity values from entry to exit of the channel. On the other hand, temperature-jump values are smaller for the cases with lower inlet M . The performed analyses and comparisons show that the use of the proposed CBS algorithm with pP2P1 type elements is promising for fluid flow problems in slip regime.

Keywords: slip-velocity, temperature-jump, characteristic based split algorithm, finite element method, micro flow.

Giriş

Mikro-Elektro-Mekanik-Sistemler (MEMS), mekanik ve elektrikli aygıtların bir bileşimi olup boyutları 1 mm ile 1 mikron arasında değişmektedir. Akışkanın bu küçük aygıtların içi veya etrafındaki hareketi sırasında ortaya çıkan sürtünme, elektrostatik kuvvet ve viskoz etkiler, atalet kuvvetleriyle kıyaslandıklarında oldukça baskındır (Gad-el-Hak, 2001). Moleküller arası ortalama serbest uzaklığın (λ) akışa ilişkin karakteristik boya (L) oranı olarak tanımlanan Knudsen sayısı (Kn), seyrelme etkisinin bir ölçüsü olarak değerlendirilir. Küçülen karakteristik boya bağlı olarak Knudsen sayısı büyüdükçe, sürekli ortam yaklaşımına dayalı modeller kullanılarak elde edilen sonuçlarla gerçek akış değerleri arasındaki fark, artan kayma-hızı, sıcaklık-sıçraması, ısıl-sürtünme, seyrelme ve viskoz kayıplara bağlı olarak artar (Gad-el-Hak, 2001).

Knudsen sayısının 10^{-3} den küçük değerler aldığı sürekli rejimde yer alan akışlar, Navier-Stokes denklemleri (N-S) gibi sürekli ortam yaklaşımına dayalı modeller kullanılarak temsil edilebilir. Knudsen sayısının 10^{-3} ile 10^{-1} arasında değerler aldığı aralık, kayma rejimi olarak adlandırılır. Sürekli rejimde katı duvar yüzeyinde geçerli olan, akışkan hız ve sıcaklığının duvara ait hız ve sıcaklık değerlerine eşit olması şartı, geçerliliğini bu rejimde yitirir. Bu farklılığın temel sebebi, akışkan tanecikleri ile duvar arasında yeterince çarpışma olmaması ve akışkanın termodinamik denge halinden uzaklaşmasıdır. Bu yüzden kayma rejiminde yer alan akışlarda, akışkanın duvar üzerindeki hız ve sıcaklık değerlerinde sınırlı miktarlarda süreksizlikler söz konusu olur. Knudsen sayısının daha büyük değerleri için, sürekli ortam yaklaşımı tamamen ortadan kalkar ve akışkan hareketi Boltzmann denklemi gibi moleküler modeller kullanılarak temsil edilebilir. Knudsen sayısının 0.1-10 aralığında değerler aldığı geçiş rejiminde yer alan akışlar, Navier-Stokes denklemlerinden daha yüksek mertebeli olan Burnett denklemi veya moleküler yaklaşıma dayalı DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) yöntemi kullanılarak temsil edilebilirler (Gad-el-Hak, 2002).

Chorin tarafından sıkıştırılamaz akış problemlerinin sonlu farklar yöntemi çözümünde kullanılmak üzere önerilen bölünmüş adımlar yöntemi (Chorin, 1967, 1969), bugüne dek birçok akış probleminin çözümünde kullanılmıştır. Bu yöntemin, sıkıştırılabilir akış problemlerine sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak uyarlanması ise Zienkiewicz ve Wu tarafından 1992 yılında gerçekleştirilmiştir. 1995 yılında, Zienkiewicz ve Codina, o güne dek sıkıştırılabilir akış problemlerini çözmek için kullandıkları Lax-Wendroff sonlu farklar yönteminin sonlu elemanlar karşılığı olan Taylor-Galerkin yönteminin (Zienkiewicz ve Taylor, 1991) yerini alacak yeni bir yöntem önermiş, ardından da hem sıkıştırılabilir hem de sıkıştırılamaz akış problemlerinin çözümünde kullanılabilen bu yöntemin temel özelliklerini ve uygulamalarını yayınladıkları makalelerle duyurmuşlardır (Zienkiewicz ve Codina 1995, Zienkiewicz vd., 1995, Zienkiewicz vd., 1996), (Codina vd., 1998). 1999 yılında yayınladıkları makaleyle bu yöntemi Karakteristik Tabanlı Ayırma (KTA) yöntemi ismiyle literatüre kazandırmışlardır (Zienkiewicz vd., 1999).

KTA yöntemi sayesinde, hem sıkıştırılabilir hem de sıkıştırılamaz akış problemleri bir tek çözücü kullanılarak sonuca ulaştırılabilmektedir. Literatürde, KTA yöntemi kullanılarak çözülmüş çok farklı problemler yer almaktadır. Bu yöntemin sahip olduğu çok yönlülük, çözücünün kayma rejiminde yer alan seyrelmiş gaz akışını da temsil edebilecek şekilde iyileştirilmesi ile daha da gelişecektir. Bu sayede, mikro boyuttaki geometriler etrafında veya içerisindeki akış problemleri çözülebilecek, hatta KTA algoritması yardımıyla bu geometriler için kapsamlı analizler yapılabilecektir.

Bu çalışmada, KTA yöntemi kullanılarak mikro boyuttaki ters basamak geometrisi içindeki sıkıştırılabilir akış analizi gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla söz konusu N-S Sonlu Elemanlar Yöntemi çözücüsü, Beskok vd. (1996) tarafından önerilen ikinci mertebe kayma-hızı/sıcaklık-sıçraması sınır şartlarının uyarlanmasıyla mikro akış analizinde kullanılabilecek hale getirilmiştir. KTA SEY çözücüsü üzerinde yapılan bu de-

ğişiklikler, daha önceki çalışmalar çerçevesinde farklı mikro akış problemleri için doğrulanmıştır. Alternatif yöntemlerle elde edilmiş sonuçlar kullanılarak gerçekleştirilen karşılaştırmalar, yapılan uyarlamaların başarılı olduğunu göstermiştir. Böylece, karmaşık bir mikro akış problemi olan ters basamak geometrisi içindeki seyrelmiş gaz akışı, bu çalışma kapsamında geliştirilen çözücü kullanılarak analiz edilmiştir.

Kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması

Maxwell ve Smoluchowski tarafından önerilen birinci mertebe kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması sınır şartları aşağıdaki denklemlerde verildiği gibidir (Gad-el-Hak, 2002):

$$u_s - u_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T_{gas}} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_w \quad (1)$$

$$T_s - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left[\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} \right] \frac{\lambda}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \quad (2)$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan s ve w alt indisleri, sırasıyla akışkan ve duvara ait değerleri belirtmek için kullanılmıştır. $\partial/\partial n$ ve $\partial/\partial s$, duvara dik ve paralel yöndeki gradyenleri temsil etmektedir. ρ , u , T , Pr , μ ve γ sırasıyla yoğunluk, hız, sıcaklık, Prandtl sayısı, viskozite ve ısıl kapasite oranıdır. Duvara paralel doğrultudaki momentum ve enerji barındırma katsayıları ise σ_v ve σ_T ile gösterilmiştir. Bu katsayılar, akışkan taneciklerinin enerji ve momentumlarının duvarla çarpışma sonrasında da korundukları varsayıldığında bire eşit olurlar. Beskok ve Karniadakis, asimptotik analiz yardımıyla aşağıda açık ifadesi verilmiş olan ikinci mertebe kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması sınır şartlarını elde etmişlerdir (Beskok vd., 1996).

Denklem 3'de yer alan b , yüksek mertebeden kayma katsayısı olarak bilinmekte ve değeri analitik veya sayısal olarak hesaplanmaktadır (Beskok ve Karniadakis, 1999). Üst indis $*$,

boyutsuz değişkenleri göstermek için kullanılmıştır. Yine bu denklemdeki Re ve Ec , sırasıyla Reynolds ($= \rho u L / \mu$) ve Eckert ($= u^2 / c_p \Delta T$) sayılarını temsil etmektedir. Denklemin sağ tarafında yer alan ikinci terim, Kn büyüdükçe etkili olan ısıl sürünme terimi olup akım yönünde sıcaklık değişimi yoksa sıfıra gider.

$$u_s^* - u_w^* = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{Kn}{1 - bKn} \left(\frac{\partial u^*}{\partial n^*} \right)_w + \frac{3}{2\pi} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{Kn^2 Re}{Ec} \left(\frac{\partial T^*}{\partial s^*} \right)_w \quad (3)$$

$$T_s^* - T_w^* = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left[\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} \right] \frac{Kn}{Pr} \left(\frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right)_w \quad (4)$$

KTA yöntemi

Bu çalışmada, mikro boyutlu bir geometri içindeki sıkıştırılabilir viskoz akış probleminin çözümü için KTA yöntemini meydana getiren yardımcı momentum, süreklilik, tamamlayıcı momentum ve enerji denklemleri her bir zaman adımında birlikte çözülürken, katı duvar yüzeylerinde ikinci mertebeden kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması sınır şartları uygulanmıştır. Hesaplamalarda, süreklilik denkleminin kapalı, yardımcı momentum, tamamlayıcı momentum ve enerji denklemlerin açık birer şema kullanılarak çözüme kavuşturulduğu yarı-kapalı diye isimlendirilen yaklaşım kullanılmıştır. Söz konusu denklemler (integral formda) ve bu denklemlerin çözümünde kullanılan yöntem aşağıda verilmiştir.

Yardımcı momentum denklemi

Viskoz sıkıştırılabilir bir akış için, momentum denklemi korunumlu halde yazılıp karakteristik-Galerkin yaklaşımı kullanılarak ayrıklaştırıldıktan sonra Chorin'in bölünmüş adımlar yaklaşımı uygulanırsa, KTA yöntemine ait yardımcı momentum denklemi elde edilir. Bu denklemin uzayda ayrıklaştırılması standart Galerkin yaklaşımı ile optimal olduğundan, momentuma ait şekil fonksiyonu (N_u) ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u \Delta \tilde{U}_i d\Omega = \Delta t \left[- \int_{\Omega} N_u \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) d\Omega \right]^n \\ + \Delta t \left[- \int_{\Omega} \frac{\partial N_u}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega \right]^n \\ + \Delta t \left[\int_{\Omega} N_u (\rho g_i) d\Omega + \int_{\Gamma} N_u \tau_{ij} n_j d\Gamma \right]^n \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k N_u) \left(- \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) d\Omega \right]^n \end{aligned} \quad (5)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan Δt ve x_i , sırasıyla zaman adımı ve kartezyen koordinat bileşeni olup, üst indis n zamanı temsil etmektedir. \tilde{U}_i ve n_j , sırasıyla x_i ve x_j doğrultularındaki momentum ve birim normal vektördür.

Süreklilik denklemi

Yardımcı momentum denkleminde olduğu gibi, süreklilik denklemi, basınca ait şekil fonksiyonu (N_p) ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integre edilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p \frac{\Delta p}{\Delta t} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \left(\Delta \tilde{U}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \quad (6) \\ - \int_{\Gamma} N_p \left[U_i^n + \theta_1 \left(\Delta \tilde{U}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right) \right] n_i d\Gamma \end{aligned}$$

Yarı-kapalı şema kullanıldığında, yukarıdaki denklemde yer alan θ_1 ve θ_2 parametrelerine ait değerler bir olarak alınabilir. Denklemin sağ tarafında yer alan köşeli parantez içindeki ifadeler, $n+\theta_1$ anındaki momentum değerleridir. Bu sebeple, 6 numaralı denklemdeki sınır integralinin katı duvar üzerindeki değeri sıfıra eşittir ve hesaplanmasına gerek yoktur.

Sıkıştırılabilir akış söz konusu olduğunda, 6 numaralı denklemin sol tarafında yer alan Δp terimi ($=p^{n+1}-p^n$), mükemmel gaz denklemi ($p = \rho RT$) yardımıyla basınçla ilişkilendirilir. Süreklilik denklemi çözülürken basınç veya yo-

ğunluk bilinmeyen (bağımlı değişken) olarak seçilebilir. Basıncın bağımlı değişken olarak seçildiği durumda, Δp terimi, n ve $n+1$ anındaki basınç değerleri cinsinden aşağıdaki denklemden yararlanılarak yazılır.

$$\Delta p = \frac{\Delta p}{RT_g} + \left(\frac{p^n}{RT_g} - \frac{p^n}{RT^n} \right) \quad (7)$$

Buradaki T_g terimi geçici (tahmini) sıcaklık değeridir. $n+1$ anına ait basınç değerlerine ulaşmak için hesap yapılırken T^{n+1} yerine bu değer kullanılır.

Tamamlayıcı momentum denklemi

$n+1$ anına ait momentum değerleri, yardımcı momentum ve süreklilik denklemlerinden elde edilen $\Delta \tilde{U}_i$ ve Δp değerlerinin aşağıda verilen denklemde kullanılmasıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u \Delta U_i d\Omega = \int_{\Omega} N_u \Delta \tilde{U}_i d\Omega \\ - \Delta t \int_{\Omega} N_u \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (7) \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j N_u) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned}$$

Enerji denklemi

Sıkıştırılabilir akış durumunda, süreklilik ve momentum denklemleri ile birlikte çözülen enerji denklemi (integral formda) aşağıda yazıldığı gibidir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_E \Delta(\rho e) d\Omega = - \Delta t \left[\int_{\Omega} N_E \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i (\rho e + p)] d\Omega \right]^n \\ - \Delta t \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_E}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} + \tau_{ij} u_j \right) d\Omega \right]^n \quad (8) \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial (u_k N_E)}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i (\rho e + p)) \right] d\Omega \right]^n \\ + \Delta t \left[\int_{\Gamma} N_E \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} + \tau_{ij} u_j \right) n_i d\Gamma \right]^n \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem, korunumlu haldeki enerji denkleminin KTA yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılması ile elde edilmiş olup, birim kütle başına toplam enerji $e = c_v T + u_i u_i / 2$ şeklindedir.

Çözüm yöntemi

Yukarıda sonlu elemanlar formülasyonu verilmiş olan yardımcı momentum, süreklilik, tamamlayıcı momentum ve enerji denklemleri, sıkıştırılabilir mikro akış söz konusu olduğunda aşağıdaki sıra ve yöntem kullanılarak çözüme kavuşturulur.

1. Enerji denklemini duvar yüzeyindeki sıcaklık-sıçraması ve kayma-hızı değerlerini kullanarak çöz ve toplam enerji değerlerini elde et.
2. Yardımcı momentum denklemini herhangi bir sınır şartı uygulamaksızın çöz.
3. Süreklilik denkleminin çözülebilmesi için ihtiyaç duyulan geçici sıcaklık (T_g) değerlerini adım 1’de hesaplanan toplam enerji değerlerinden elde et.
4. Geçici sıcaklık değerlerinden yararlanıp süreklilik denklemini sınırda kayma-hızı şartını da kullanarak çöz ve basınç (p^{n+1}) değerlerini elde et.
5. Tamamlayıcı momentum denklemini çözerek bir sonraki zamana ait momentum değerlerini elde et.
6. Mükemmel gaz denkleminde yararlanarak yoğunluk (ρ^{n+1}) değerlerini elde et ve bu değerleri kullanarak momentum değerlerinden hız alanını hesapla.
7. Elde edilen hız, yoğunluk ve enerji değerlerini kullanarak yeni zaman adımına ait sıcaklık değerlerini (T^{n+1}) elde et.
8. Bir sonraki zaman adımında kullanılmak üzere duvardaki kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması değerlerini hesapla.
9. Elde edilen T^{n+1} değerleri, hesaplamanın başında kullanılan T_g değerlerinden çok farklıysa bu değerleri T_g olarak kabul et ve adım 4’e geri dönüp sonraki adımları tekrar et.

Bu çalışmadaki hesaplamalar, yukarıda verilen 9 madde ile özetlenebilecek çözüm yöntemi izlenerek gerçekleştirilmiştir. 1 numaralı adımda toplam enerji değerleri elde edilmiş olmasına rağmen, o anda yeni hız alanı ve yoğunluk de-

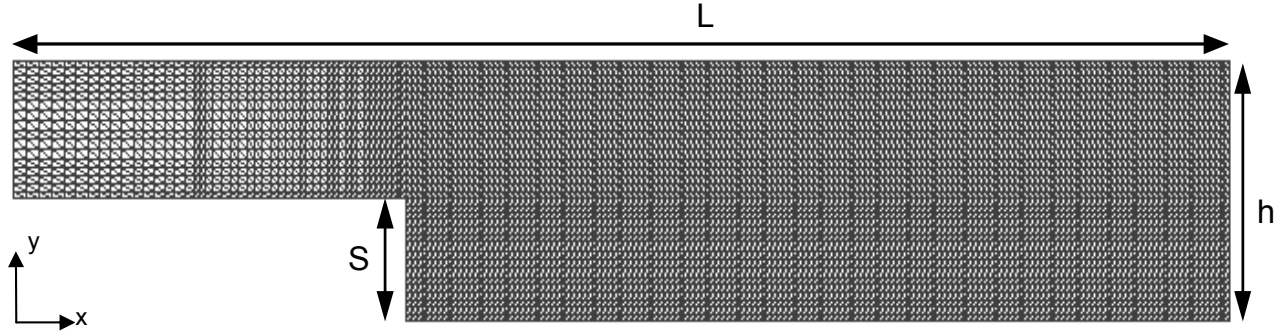
ğerleri henüz hesaplanmamış olduğu için, bir önceki ana ait hız ve yoğunluk değerleri kullanılarak T_g elde edilmektedir. Bu yaklaşım daimi akış problemlerinin çözümünde kullanıldığında, iki kez sıcaklık tahmini yapılması yeterli olmaktadır. İki kereden fazla sıcaklık tahmini yapılmasının hesaplama zamanı ve sonuca etki etmediği bilinmektedir (Codina vd., 1998).

Bu çalışmada, KTA yöntemine ait yarı-kapalı bir şema kullanılarak hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Bir başka deyişle, süreklilik denklemini, basınç alanını elde etmek için kapalı bir şema kullanılarak çözülmüştür. Daha önceki çalışmalarda olduğu gibi, bu çalışmada da sanki ikinciderece hız/doğrusal basınç elemanları (pP2P1) kullanılmıştır (Çelik v.d., 2003). pP2P1 tipi elemanların hesaplamada kullanılmasıyla, hız ve basınç alanları sanki iki farklı hesaplama ağı üzerinde çözüm yapılmışçasına elde edilmektedir (Edis, 1998), (Edis ve Aslan, 1998). KTA yönteminde, pP2P1 tipi elemanların doğrusal hız/basınç elemanları (P1P1) yerine kullanılmasıyla, hesaplama zamanı açısından %59’a varan kazanç sağlandığı daha önce yapılan çalışmalarda gözlemlenmiştir (Edis vd., 2001).

Mikro boyutlu ters basamak içindeki akış

Bu çalışmada, içerisinde viskoz sıkıştırılabilir akış analizi yapılan mikro aygıt bir ters basamak geometrisidir. İncelenen problem, akış alanında ters basınç gradyeni ve akım ayrılması olması sebebiyle özellikle tercih edilmiştir. Bu problemde olduğu gibi, akış şartlarında meydana gelen ani değişimler, ortalama serbest uzaklık değerine etki etmektedir. Kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması değerlerinin, ortalama serbest uzaklıkla doğrudan ilişkili olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, kanal duvarları boyunca hesaplanan kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması değerlerinin, akış şartları ile birlikte değerlendirilmesinde yarar vardır.

Hesaplama kullanılan ağ, pP2P1 tipi elemanlardan oluşmakta ve 11776 hız 2944 adet basınç elemanı içermektedir. Şekil 1’de, hız alanı hesabında kullanılan ağ görülmektedir.



Şekil 1. Hız alanı hesabında kullanılan ağ ve boyutlandırma

İncelenen ters basamak geometrisi, 7 mikron uzunluğunda olup kanal boyunun kanal çıkış yüksekliğine oranı (L/h) 5.6'dır. Kanal girişindeki etkiler de analize dahil edilmiş ve kanal girişi $x/h=0.86$ olacak şekilde konumlandırılmıştır. Kanal çıkış yüksekliğinin basamak yüksekliğine oranı (h/S) 0.467'dir.

Geometrik ayrıntıları yukarıda verilmiş olan hesaplama bölgesi için, aynı giriş çıkış basınç oranına sahip üç farklı akış kurgulanmış ve incelenmiştir. İncelenen akışlarda giriş çıkış basınç oranı $II = 2.32$ olup, söz konusu olan akışkan azottur. Giriş çıkış basınç oranı her üç akış için de korunurken, kanal giriş ve çıkış basınç değerleri, kanal içindeki yerel Knudsen sayısı kayma rejiminde yer alacak şekilde belirlenmiştir.

Kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması sınır şartlarının uygulandığı kanal duvarları 300°K sıcaklığındadır. Giriş öncesinde azot 330°K sıcaklığa sahiptir.

Yukarıda ayrıntıları verilen üç farklı akışa ait giriş Kn , M ve Re sayıları ile analiz sonucunda elde edilen akışkanın tekrar duvara yapışma mesafeleri (x/S) Tablo 1'de verilmiştir. Bu tabloda yer alan I numaralı akış, Baysal ve Aslan (2002) tarafından N-S Sonlu Hacimler ve Beskok (2002) tarafından da DSMC çözücüsü kullanılarak analiz edilmiştir.

I numaralı akışa ait duvara dik doğrultuda beş farklı mesafedeki hız değerleri (kanal boyunca) hesaplanmış ve yerel ses hızı kullanılarak normalize edilmiştir. Hesaplanan bu değerler, Baysal

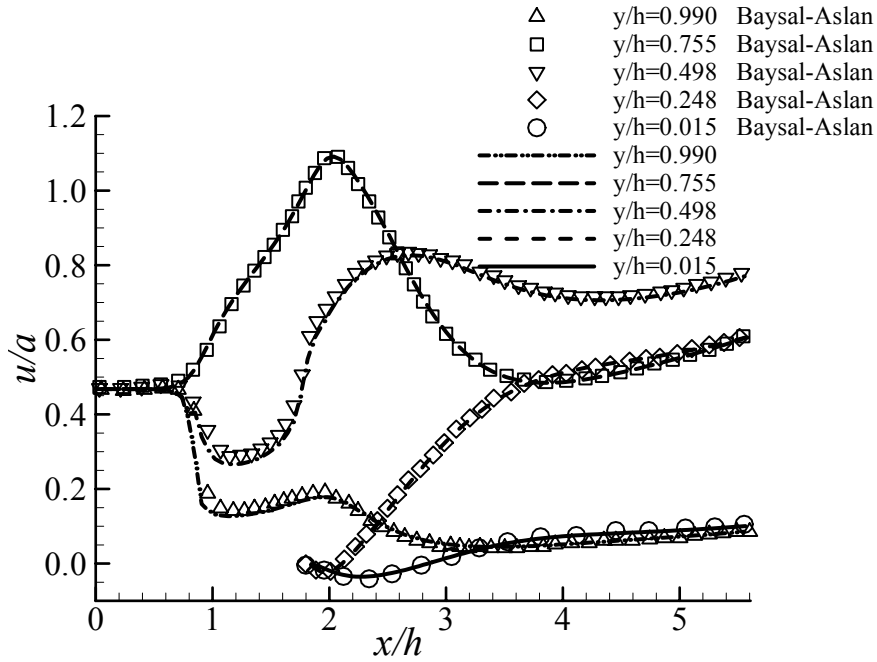
ve Aslan'ın (2002) elde ettiği sonuçlarla Şekil 2'de karşılaştırılmıştır (Çelik ve Edis, 2006). Elde edilen sonuçlar, hesaplanan kayma-hızlarının, kanal girişindeki küçük farklılık dışında Baysal ve Aslan'ın elde ettiği sonuçlarla büyük bir uyum içinde olduğunu göstermektedir. Söz konusu farklılık, kanal girişindeki yüksek hız ve sıcaklık gradyanlarının bir sonucu olarak değerlendirilebilir ve hesaplamada kullanılan ağın bu bölge üzerinde iyileştirilmesiyle ortadan kaldırılabilir.

Tablo 1. İncelenen mikro akış durumları

| Akış No | Kn_{in} | M_{in} | Re_{in} | x/S |
|---------|-----------|----------|-----------|-------|
| I | 0.009 | 0.47 | 80 | 2.22 |
| II | 0.012 | 0.43 | 55 | 1.77 |
| III | 0.017 | 0.36 | 31 | 1.19 |

Tablo 1'de verilen üç farklı akışa ait kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması dağılımları, kanalın üst ve alt duvarları boyunca sırasıyla Şekil 3, 4, 5 ve 6'da verilmiştir. Şekil 3'de görüldüğü gibi, kanal girişinden hemen sonra ($x/h=0.86$) sıcaklık-sıçraması değerleri hızla düşmektedir. Kanal geometrisindeki ani genişleme sebebiyle hızlanan akışkanın kinetik enerjisindeki artışa bağlı olarak sıcaklık değerleri düşmektedir. Bu sebeple, bu bölgede yer alan duvara dik doğrultudaki sıcaklık gradyanları, akım yönünde azalmaktadır.

Bunun sonucu olarak da sıcaklık sıçraması değerlerinde Şekil 3'te de açıkça görülen düşüş gerçekleşir. Bir başka deyişle, akım doğrultusundaki hızlanma, sıcaklık sıçraması değerlerinde düşüş olarak kendini gösterir. Benzer yakla-



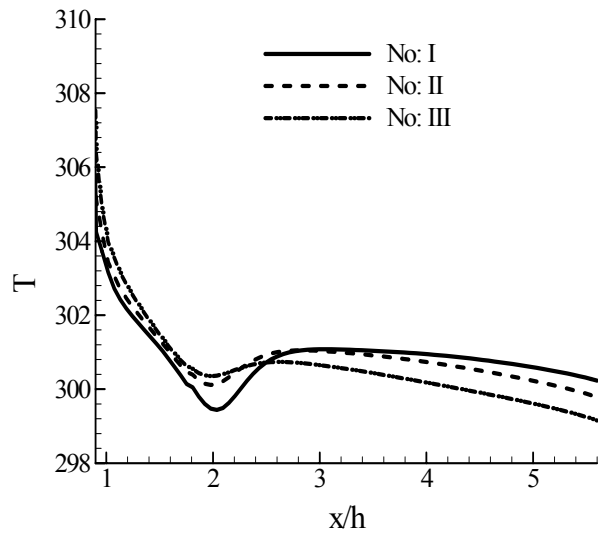
Şekil 2. Kanal boyunca akışkan hızının değişimi

şimla, kanal girişinden ani genişleme bölgesine kadar hızlanan akım, duvara dik doğrultuda artan bir hız gradyeni meydana getirmektedir. Bu da beklenildiği gibi, kanal girişinden ani genişleme bölgesine kadar artan kayma-hızı olarak ortaya çıkar. Şekil 4 ve 6'daki kayma hızları, kanal girişi orta noktasındaki hız değeri kullanılarak normleştirilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi, yüksek giriş Knudsen sayılı akışlara ait alt ve üst duvarlardaki kayma-hızları (u^*) yüksek değerler almaktadır. Bu da, giriş Knudsen sayısı büyüdükçe hız profilinin değiştiği ve parabolikliğinin azaldığını ortaya koymaktadır.

Ani genişleme bölgesi civarına kadar hızlanan akım, $x/h=2.0$ civarlarında maksimum hız ve minimum sıcaklık değerlerine ulaşır. Kanaldaki ani genişleme, beklenildiği gibi ters basınç gradyeni meydana getirir. Oluşan ters basınç gradyeninin etkisiyle alt duvarda önce akım ayrılır ardından tekrar duvara yapışır. Tablo 1 de, incelenen üç akış için, duvara yapışma mesafeleri karşılaştırma amaçlı verilmiştir. Beklenildiği gibi, artan giriş Knudsen sayısı ile birlikte kayma-hızı değerleri yükselmekte ve bunun sonucunda da tekrar duvara yapışma mesafeleri kısalmaktadır. Ani genişlemeden sonraki bölgede, üst duvardaki kayma-hızı değerlerindeki

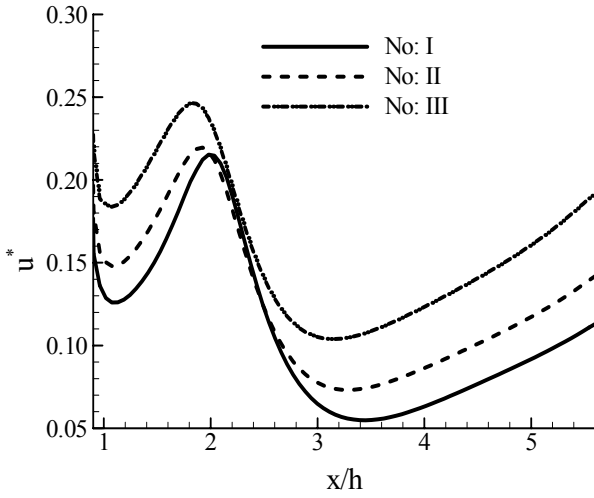
düşüş, ters basınç gradyeninin bir sonucudur. Bu düşüş I nolu akış için $x/h=3.5$ civarlarına kadar gözlemlenirken, beklenildiği gibi giriş Mach sayısının düşük olduğu II ve III nolu akışlarda daha erken sona ermektedir.

Üst duvarda ters basınç gradyeninin etkili olduğu alanda, sıcaklık-sıçraması değerlerinde de belirgin bir artış söz konusudur. Alt duvarda ise, oluşan ters akıma bağlı olarak kayma hızları işaret değiştirir. Akımın tekrar duvara yapıştığı



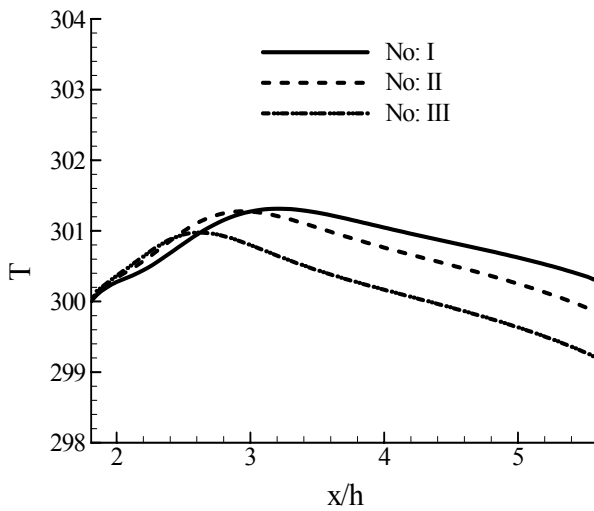
Şekil 3. Üst duvar boyunca sıcaklık-sıçraması dağılımı

noktaya kadar sıcaklık-sıçraması değerleri I, II ve III nolu akışlar için sürekli bir biçimde artar.

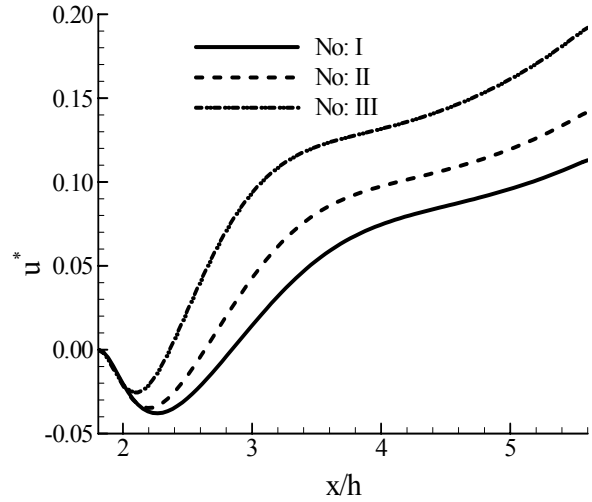


Şekil 4. Üst duvar boyunca kayma-hızı dağılımı

Akımın tekrar duvara yapıştığı noktadan sonra akım gelişme bölgesine girer ve tipik ses altı kanal akışı davranışları gösterir. Artan akışkan hızı ile birlikte akışkanın sıcaklığı azalırken alt ve üst duvarlarda simetrik olmak üzere çıkışa doğru artan kayma-hızları meydana gelir. Benzer şekilde, sıcaklık-sıçraması değerleri de kanal çıkışına doğru azalma eğilimi göstermektedir. Yüksek giriş Knudsen sayılı akışlarda kanal çıkışına doğru iyice hızlanan akıma bağlı olarak, sıcaklık sıçraması değerleri duvar sıcaklığından daha düşüktür.

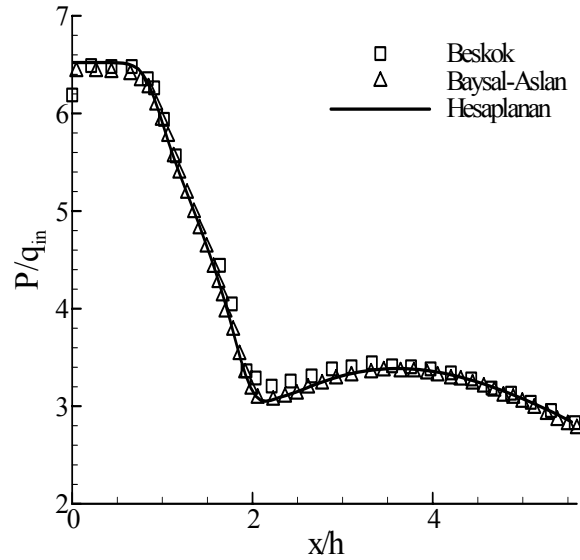


Şekil 5. Alt duvar boyunca sıcaklık-sıçraması dağılımı



Şekil 6. Alt duvar boyunca kayma-hızı dağılımı

Kanal boyunca basınç dağılımı, girişteki dinamik basınç değeri ($q_{in} = 0.5 * \rho_{in} u_{in}^2$) ile normalize edilip Baysal ve Aslan (2002) ve Beskok'un (2002) elde ettiği sonuçlarla karşılaştırılmak üzere Şekil 7'de verilmiştir. Bu karşılaştırma da göstermektedir ki KTA çözümü kullanılarak elde edilen sonuçlar söz konusu kaynaklarla büyük bir uyum içindedir.



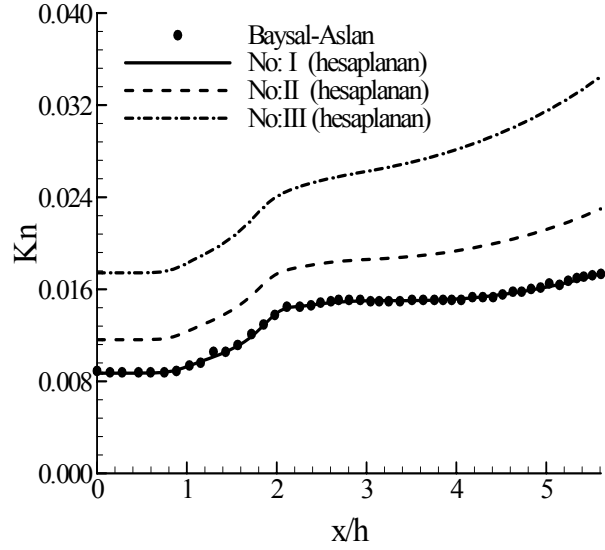
Şekil 7. Kanal boyunca basınç dağılımı

İncelenen her üç akışa ait kanal boyunca yerel Knudsen sayısı dağılımları elde edilmiş ve Şekil 8'de karşılaştırma amaçlı verilmiştir. Bu şekilde de görüldüğü üzere, kanal girişinden basamağa

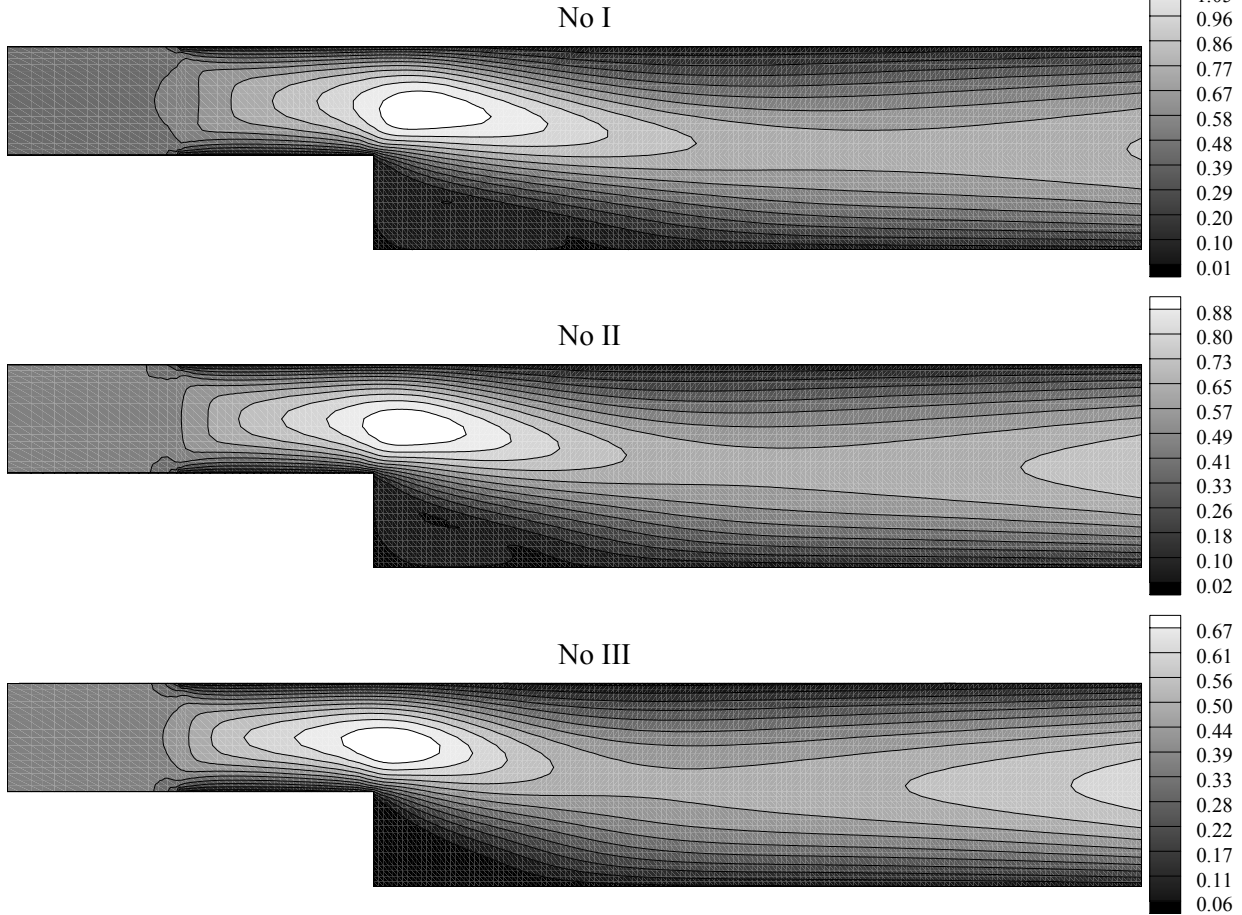
kadar olan bölgede, her üç akışa ait dağılımlar benzer bir değişim göstermektedir. Öte yandan, basamaktan kanal çıkışına kadar olan bölgedeki dağılımlar, birbirlerinden oldukça farklıdır. I nolu akışa ait yerel Knudsen sayısı dağılımı, Baysal ve Aslan'ın (2002) elde ettiği sonuçla karşılaştırılmış ve sonuçların büyük bir uyum içinde oldukları gözlemlenmiştir.

Akış alanındaki Mach konturları, üç akış için ayrı ayrı Şekil 9'da verilmiştir. Bu üç akış, aynı giriş çıkış basınç oranına sahip olmalarına rağmen, özellikle basamak ve kanal çıkışı civarında farklı davranışlar göstermektedirler. Bu farklılık, Şekil 8'de açıkça görülen, yerel Knudsen sayısı dağılımlarındaki farklılığın kayma-hızı ve sıcaklık-sıçraması değerlerine etkisinin bir sonucu olarak yorumlanabilir. Giriş Knudsen sayısı büyüdükçe, kanal çıkışına doğru daha yüksek yerel Knudsen sayısı gradyanları söz konusu olmaktadır. Bunun sonucu olarak artan kayma-hızları, yüksek Mach gradyanları meydana ge-

tirmektedir (Şekil 9). Öte yandan, düşük Knudsen sayılı I numaralı akış, basamak civarında daha yüksek Mach sayılarına ulaşsa da kanal çıkışında bunun tersi söz konusudur.



Şekil 8. Kanal boyunca Kn dağılımı



Şekil 9. Kanal boyunca M konturları

Sonuçlar

Bu çalışmada, hem sıkıştırılabilir hem de sıkıştırılamaz akış problemlerinin çözümünde kullanılabilen KTA SEY çözücüsü, kayma rejiminde yer alan akışları da modelleyebilecek şekilde geliştirilmiştir. Mikro boyutlu ters basamak geometrisi için, Knudsen sayısı kayma bölgesinde yer alacak şekilde üç farklı akış kurgulanmıştır. Söz konusu akışlar, geliştirilen çözücünün etkinliğini sınamak ve gerçekleştirilen uyarlamaları doğrulamak için hesaplamalı olarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar literatürde yer alan diğer hesaplamalı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar, kullanılan algoritmanın ve uygulanan yaklaşımın oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Elde edilen akış alanları ve bu alan içindeki değişimler, kayma-hızı ve sıcaklık-sıcırması dağılımları ile ilişkilendirilerek açıklanmıştır. Böylece MEMS vb. aygıtlar içindeki akışların anlaşılması ve bu aygıtların hesaplamalı yöntemler kullanılarak modellenip iyileştirilmesine yönelik önemli bir adım atılmıştır.

Kaynaklar

- Baysal, O. ve Aslan, A.R., (2002), Computing separated flows in MEMS devices. ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Quebec, Canada, July 14-18.
- Beskok, A. ve Karniadakis, G.E., (1999), A model for flows in channels, pipes and ducts at micro and nano scales, *Microscale Thermophysical Engineering*, **3**, 43-77.
- Beskok, A., Karniadakis, G.E. ve Trimmer, W., (1996), Rarefaction and compressibility effects in gas microflows, *Journal of Fluids Engineering*, **118**, 448-456.
- Beskok, A., (2002), *Molecular Based Microfluidic simulation models*, MEMS Handbook, Gad-el Hak, M. (Editor), 8.1-8.28, CRC Press, New York.
- Chorin, A., (1967), A numerical method for solving incompressible viscous problems, *Journal of Computational Physics*, **2**, 12-26.
- Chorin, A., (1969), On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, **23**, 341-353.
- Codina, R., Vasquez M. ve Zienkiewicz O.C., (1998), A General algorithm for compressible incompressible flows-Part III: semi implicit form, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **27**, 13-32.
- Çelik, B. ve Edis, F.O., (2006) Analysis of fluid flow through micro-fluidic devices using characteristic-based-split procedure, *Numerical Methods in Fluids* yayınlanacak.
- Çelik, B., Edis, F.O. ve Mısırlıoğlu, A., (2003), Analysis of micro synthetic jets using CBS finite element method on moving deforming grids, International symposium on Transient convective heat and mass transfer in single and two-phase flows, August 17-22, Cesme, Turkey, 417-426.
- Edis, F. O., Aslan, R. A., (1998), Efficient incompressible flow calculations using pQ2Q1 elements, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **14**, 161-178.
- Edis, F.O., Aslan, R.A. ve Çelik B., (2001), Implementation of pseudo-second order velocity interpolation within the Characteristic-Based-Split Procedure, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, Wales, UK, 4-7 September.
- Edis, F.O., (1998), Efficient finite element computation of incompressible viscous flows using pseudo-second-order velocity interpolation, *Ph.D. Thesis*, Istanbul Technical University, Institute of Science and Technology, İstanbul.
- Gad-el-Hak, M., (2001), Flow physics in MEMS, *Mecanique & Industries*, **2**, 313-341.
- Gad-el-Hak, M. (Editor), (2002), MEMS Handbook, CRC Press, New York.
- Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L. (1991), *Finite Element Method*, Vol. 2, 4th edition, McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O.C. ve Wu, J., (1992), A general explicit or semi-implicit algorithm for compressible or incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 457-479.
- Zienkiewicz, O.C. ve Codina, R., (1995), A general algorithm for compressible and incompressible flows. Part I: The split, characteristic-based scheme, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 869-885.

- Zienkiewicz, O.C., Morgan K., Satya Sai B.V.K., Codina, R. ve Vasquez, M., (1995), A General algorithm for compressible incompressible flows-Part II: Tests on the explicit form, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 887-913.
- Zienkiewicz, O. C., Satya Sai B. V. K., Morgan, K. ve Codina R., (1996), Split characteristic based semi implicit algorithm for laminar/turbulent incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **23**, 787-809.
- Zienkiewicz, O.C., Nithiarasu, P. Vasquez, M., Codina, R. ve Ortiz, P., (1999), The characteristic-based-split procedure: An efficient algorithm for fluid problems, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **31**, 359-392.